**Problema 23** **Radioactive decay**

**a)** La massa dell'isotopo che si forma in seguito al decadimento é leggermente più piccola di quella dell'isotopo di partenza. La massa mancante si trasforma in energia (secondo la ben nota equazione $E = m\,c^2$) che viene "ceduta" alla particella β. Quindi l'energia delle particelle β emesse sarà pari a $E = c^2\,\Delta m$ dove Δm é la differenza di massa tra l'isotopo che si forma e l'isotopo che decade. Considerando il decadimento:

$$^{32}_{15}P \rightarrow {}^{32}_{16}S + \beta$$

la differenza di massa risulta di 0,00183627 uma, pari a $3{,}0493 \cdot 10^{-30}$ kg. Da ciò si ricava l'energia della particella β:

$$E = (2{,}998 \cdot 10^8\ m\ s^{-1})^2 \cdot 3{,}0493 \cdot 10^{-30}\ kg = 2{,}74 \cdot 10^{-13}\ J = 1{,}71 \cdot 10^6\ eV$$

Allo stesso modo, per il decadimento

$$^{33}_{15}P \rightarrow {}^{33}_{16}S + \beta$$

si ricava $\Delta m = 0{,}00026674$ uma $= 4{,}429 \cdot 10^{-31}$ kg e quindi $E = 3{,}98 \cdot 10^{-14}\ J = 2{,}48 \cdot 10^5\ eV$

**b)** Dalla lunghezza d'onda si calcola l'energia dei fotoni in joule con la relazione:

$$E = \frac{hc}{l} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ J\ s \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8}\ m\ s^{-1}}{0{,}1175 \cdot 10^{9}\ m} = 1{,}691 \cdot 10^{-15}\ J$$

e quindi convertendo in eV:

$$E(eV) = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ J\ s \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8}\ m\ s^{-1}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ J\ eV^{-1}} = 1{,}055 \cdot 10^{4}\ eV$$

**c)** Un decadimento radioattivo segue una cinetica del primo ordine, quindi:

$$A = k \cdot N \qquad\qquad A = -\frac{dN}{dt}$$

dove A é l'attività del campione (cioè il numero di disintegrazioni al secondo), k é la costante cinetica e N é il numero di atomi di isotopo radioattivo presenti. La costante cinetica é legata al tempo di dimezzamento ($t_{1/2}$, che viene fornito come dato del problema) dalla relazione:

$$k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

(come esercizio ricavare questa relazione). Quindi, convertendo il tempo di dimezzamento in secondi:

$$N = \frac{A}{k} = \frac{A \cdot t_{1/2}}{\ln 2} = \frac{3{,}7 \cdot 10^{9}\ s^{-1} \cdot 1{,}2355 \cdot 10^{6}\ s}{\ln 2} = 6{,}60 \cdot 10^{15}$$

Questo é il numero di atomi di $^{32}P$ che producono un'attività' di 0,10 Ci. La massa quindi sarà:

$$m = \frac{N}{N_A} PM(^{32}P) = \frac{6{,}60 \cdot 10^{15} \cdot 31{,}9739\ g\ mol^{-1}}{6{,}022 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}} = 3{,}5 \cdot 10^{-7}\ g$$

**d)** In ogni istante di tempo, l'attività osservata é data dalla somma delle attività dovute ai due isotopi. Per semplicità chiamiamo rispettivamente A e B i due isotopi, $^{32}P$ e $^{33}P$. Quindi possiamo dire che dovrà essere:

$$\begin{cases} A(0) = A_A(0) + A_B(0) \\ A(t) = A_A(t) + A_B(t) \end{cases}$$

Per ciascun isotopo poi vale, come detto prima, una legge cinetica del primo ordine, per cui:

$$A_A(t) = A_A(0) \cdot e^{-k_A t} \qquad A_B(t) = A_B(0) \cdot e^{-k_B t}$$

dove t = 14, 3 giorni = $1{,}2355 \cdot 10^6$ s e le costanti cinetiche $k_A = 5{,}61 \cdot 10^{-7}\ s^{-1}$ e $k_B = 3{,}17 \cdot 10^{-7}\ s^{-1}$ si ricavano come descritto al punto precedente.

Se notiamo che il tempo t coincide esattamente con il tempo di dimezzamento dell'isotopo A, possiamo dire subito che $A_A(t) = ½\ A_A(0)$.

Per l'isotopo B invece dobbiamo porre mano alla calcolatrice:

$$A_B(t) = A_B(0) \cdot e^{-3{,}17 \cdot 10^{-7}\ s^{-1} \cdot 1{,}2355 \cdot 10^6\ s} = 0{,}676\ A_B(0)$$

A questo punto possiamo sostituire nel sistema (1) questi ultimi due risultati ottenendo:

$$\begin{cases} A(0) = k_A N_A(0) + k_B N_B(0) \\ A(t) = k_A \dfrac{N_A(0)}{2} + 0{,}676\ k_B N_B(0) \end{cases}$$

Risolvendo il sistema (ricordandosi di convertire le attività in disintegrazioni al secondo) si trova:

$$\begin{cases} N_A(0) = 6{,}02 \cdot 10^{20} \\ N_B(0) = 1{,}06 \cdot 10^{18} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{^{32}P}{^{33}P} = 568$$

Soluzione proposta da
Andrea Magro
Ex allievo dell' ITIS Natta – Padova