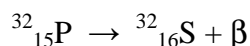


Problema 23 Radioactive decay

a) La massa dell'isotopo che si forma in seguito al decadimento é leggermente più piccola di quella dell'isotopo di partenza. La massa mancante si trasforma in energia (secondo la ben nota equazione $E = m c^2$) che viene "ceduta" alla particella β . Quindi l'energia delle particelle β emesse sarà pari a $E = c^2 \Delta m$ dove Δm é la differenza di massa tra l'isotopo che si forma e l'isotopo che decade.

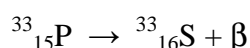
Considerando il decadimento:



la differenza di massa risulta di 0,00183627 uma, pari a $3,0493 \cdot 10^{-30}$ kg. Da ciò si ricava l'energia della particella β :

$$E = (2,998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1})^2 \cdot 3,0493 \cdot 10^{-30} \text{ kg} = 2,74 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 1,71 \cdot 10^6 \text{ eV}$$

Allo stesso modo, per il decadimento



si ricava $\Delta m = 0,00026674 \text{ uma} = 4,429 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ e quindi $E = 3,98 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 2,48 \cdot 10^5 \text{ eV}$

b) Dalla lunghezza d'onda si calcola l'energia dei fotoni in joule con la relazione:

$$E = \frac{hc}{l} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \cdot 2,998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{0,1175 \cdot 10^9 \text{ m}} = 1,691 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

e quindi convertendo in eV:

$$E(\text{eV}) = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \cdot 2,998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J eV}^{-1}} = 1,055 \cdot 10^4 \text{ eV}$$

c) Un decadimento radioattivo segue una cinetica del primo ordine, quindi:

$$A = k \cdot N \qquad A = -\frac{dN}{dt}$$

dove A é l'attività del campione (cioè il numero di disintegrazioni al secondo), k é la costante cinetica e N é il numero di atomi di isotopo radioattivo presenti. La costante cinetica é legata al tempo di dimezzamento ($t_{1/2}$, che viene fornito come dato del problema) dalla relazione:

$$k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

(come esercizio ricavare questa relazione). Quindi, convertendo il tempo di dimezzamento in secondi:

$$N = \frac{A}{k} = \frac{A \cdot t_{1/2}}{\ln 2} = \frac{3,7 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1} \cdot 1,2355 \cdot 10^6 \text{ s}}{\ln 2} = 6,60 \cdot 10^{15}$$

Questo é il numero di atomi di ${}^{32}\text{P}$ che producono un'attività' di 0,10 Ci. La massa quindi sarà:

$$m = \frac{N}{N_A} PM({}^{32}\text{P}) = \frac{6,60 \cdot 10^{15} \cdot 31,9739 \text{ g mol}^{-1}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 3,5 \cdot 10^{-7} \text{ g}$$

d) In ogni istante di tempo, l'attività osservata é data dalla somma delle attività dovute ai due isotopi. Per semplicità chiamiamo rispettivamente A e B i due isotopi, ^{32}P e ^{33}P . Quindi possiamo dire che dovrà essere:

$$\begin{cases} A(0) = A_A(0) + A_B(0) \\ A(t) = A_A(t) + A_B(t) \end{cases}$$

Per ciascun isotopo poi vale, come detto prima, una legge cinetica del primo ordine, per cui:

$$A_A(t) = A_A(0) \cdot e^{-k_A t} \qquad A_B(t) = A_B(0) \cdot e^{-k_B t}$$

dove $t = 14,3$ giorni $= 1,2355 \cdot 10^6$ s e le costanti cinetiche $k_A = 5,61 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ e $k_B = 3,17 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ si ricavano come descritto al punto precedente.

Se notiamo che il tempo t coincide esattamente con il tempo di dimezzamento dell'isotopo A, possiamo dire subito che $A_A(t) = \frac{1}{2} A_A(0)$.

Per l'isotopo B invece dobbiamo porre mano alla calcolatrice:

$$A_B(t) = A_B(0) \cdot e^{-3,17 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1} \cdot 1,2355 \cdot 10^6 \text{ s}} = 0,676 A_B(0)$$

A questo punto possiamo sostituire nel sistema (1) questi ultimi due risultati ottenendo:

$$\begin{cases} A(0) = k_A N_A(0) + k_B N_B(0) \\ A(t) = k_A \frac{N_A(0)}{2} + 0,676 k_B N_B(0) \end{cases}$$

Risolvendo il sistema (ricordandosi di convertire le attività in disintegrazioni al secondo) si trova:

$$\begin{cases} N_A(0) = 6,02 \cdot 10^{20} \\ N_B(0) = 1,06 \cdot 10^{18} \end{cases} \Rightarrow \frac{^{32}\text{P}}{^{33}\text{P}} = 568$$

Soluzione proposta da
Andrea Magro
Ex allievo dell' ITIS Natta – Padova